2. المصفوفات المربعة (Square Matrices)

تعريف المصفوفات المربعة

نسمي مصفوفة مربعة من الدرجة n كل مصفوفة من الدرجة $n\times n$ بعناصر من الحقل K.

نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بـ $M_n(K)$. إذا كانت $A\in M_n(K)$ فإنها تُمثل كما يلي

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ حيث } \forall (i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\ a_{ij}\in K$$

نسمي العناصر من الشكل $(a_{ii})_{i\in\mathbb{N}_n}$ القطر الرئيسي.

تعريف المصفوفة الواحدية

إن المصفوفة الواحدية هي المصفوفة $I_n\in M_n(K)$ والعرفة بالشكل التالي:

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

مبرهنة (5)

إن البنية $(M_n(K),+,\times)$ المزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+),(\times)$ على $M_n(K)$ (جداء و جمع المصفوفات) هي حلقة حيث $I_n\in M_n(K)$ هو الحيادي بالنسبة للقانون الداخلي $(.)$.

مبرهنة (6)

إن البنية $(M_n(K),+,.,\times)$ تشكل جبراً فوق الحقل K وحيث $(+),(\times)$ هما قانوني تشكيل داخليين على $M_n(K)$ و $(.)$ هو قانون تشكيل خارجي معرف كما يلي

$$(.):K\times E\to E;(\lambda,x)\to\lambda.x=\lambda x$$

أثر مصفوفة (Matrix Trace)

تعريف: لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة. نعرف أثر المصفوفة A ونرمز له بـ $Tr(A)$ بالعلاقة التالية $Tr(A)=a_{11}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

مثال: إن أثر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\\ 9 & 10 & 11\end{pmatrix}$

هو $Tr(A)=1+6+11=18$

مبرهنة (7)

لتكن $A,B\in M_n(K)$ فإن:

1- $Tr(A)=Tr({}^{t}A)$.

2- $\forall\lambda\in k\,;Tr(\lambda A)=\lambda Tr(A)$

3- $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$

4- $Tr(AB)=Tr(BA)$.

الإثبات:

من 1 ـ 3 واضح ومباشر من التعاريف.

4 حسب تعريف جداء المصفوفات فإن عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $C=AB$ تعطى بالشكل التالي $i=1,\dots,n\quad ;\quad C_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$ وبالتالي:

$$Tr(C)=Tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}C'_{kk}$$

حيث $C'=BA$ و $c'_{kk}=\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}$ إذن $Tr(C')=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=Tr(C)$ أي أن $Tr(AB)=Tr(BA)$.

3- قواعد الحساب في حلقة المصفوفات $M_n(K)$

1- الحلقة $M_n(K)$ غير تبديلية.

مثال

لتكن $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ & $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ لاحظنا أنه ليس من الضروري أن يكون $AB=BA$

2- الحلقة $M_n(K)$ ليست تامة أي $AB=0 \not\Rightarrow (A=0)\vee(B=0)$

مثال

لاحظ أن $B=\begin{pmatrix}0&0\\2&5\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ علماً أن $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

3- بما أن $M_n(K)$ هي حلقة بالنسبة للقانون الداخلي $(+)$ جمع المصفوفات والقانون الخارجي $(\times)$ فإننا نستطيع تطبيق القوانين والصيغ المستخدمة في الحلقات.

مثلاً: إذا كان $A,B\in M_n(K)$. إذا كان $AB=BA$ وليكن $p\in N$ فإن:

$$(A+B)^p=\sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$$

$$A^p-B^p=(A-B)(A^{p-1}+A^{p-2}B+\cdots+A^{p-1})$$

$$(I_n-A^p)=(I_n-A)(I_n+A+A^2+\cdots+A^{p-1})$$

ملاحظة

نستخدم العلاقة الأخيرة في حالة حساب قوى مصفوفة A وخصوصاً عندما $A^p=0$. ونسمي مصفوفة معدومة القوة إذا وجد $p\in\mathbb{N}$ فإن $A^p=0$.

مثال

لتكن لدينا المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. احسب A^2,A^3 ومن ثم استنتج A^n حيث $n\in N$.

الحل:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}={}^tA$$

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

لاحظ أن $A^4=I_3.A=A$ و $A^5=A^4.A=A^2={}^tA$ وأن $A_6=A_5.A={}^tA=I_3$ وهكذا..

إذن نستطيع أن نستنتج أن العلاقات التالية التي تعطى A^n :

$$A^n=A^{3p}=I_3 \quad ;p=1,2,\dots$$

$$A^n=A^{3p-1}=A^2={}^tA; \quad p=1,2,\dots$$

$$A^n=A^{3p-1}=A^3=I_3;p=1,2,\dots$$

3. بعض المصفوفات الشهيرة

1- المصفوفات القطرية (Diagonal Matrices)

وهي المصفوفات من $M_n(K)$ الشكل:

$$D=\begin{pmatrix}d_1&0&\cdots&0\\0&d_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&d_n\end{pmatrix}=Diag(d_1,\dots,d_n);(d_1,\dots,d_n)\in K^n$$

2- المصفوفات السلمية (Scalar Matrices)

هي المصفوفات المربعة من $M_n(K)$ الشكل:

$$M=\lambda I_n=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix} \quad ;\lambda\in K$$

مبرهنة (8)

إن مجموعة المصفوفات السلمية ومجموعة المصفوفات القطرية هما جبرين جزئيين من الفضاء $M_n(K)$.

بالإضافة إلى أن مجموعة المصفوفات السلمية تشاكل تقابلياً الفضاء الشعاعي $(K,+,\times)$.

ملاحظة

إن جداء مصفوفتين قطريتين هو مصفوفة قطرية نحصل عليها كما يلي:

$$Diag(d_1,\dots,d_n)Diag(d`_1,\dots,d`_n)=Diag(d_1d`_1,\dots,d_nd`_n)$$

ومنه $(Diag(d_1,\dots,d_n))^2=Diag(d_1^2,\dots,d_n^2)$.

i- المثلثية العليا (Upper Triangular matrix):

وهي المصفوفة المربعة الشكل

$$\forall(i,j)\in N_n^2;\quad u_{ij}=0; i>j \Leftrightarrow U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

ii- المثلثية الدنيا (Lower Triangular Matrix):

هي المصفوفة المربعة من الشكل:

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \forall(i,j)\in N_n^2; l_{ij}=0; i<j$$

4- المصفوفات المتناظرة والمصفوفات التخالفية (Symmetric, Skew- symmetric matrices)

نقول عن المصفوفة المربعة $A\in M_n(K)$ أنها متناظرة إذا وفقط إذا كان $A={}^tA$ ونرمز لمجموعة المصفوفات المتناظرة بـ $S_n(K)$.

ونقول عن المصفوفة المربعة $A\in M_n(K)$ أنها تخالفية إذا وفقط إذا كان $A=-{}^tA$. ونرمز لمجموعة المصفوفات التخالفية بـ $A_n(k)$.

إذا كانت مصفوفة متناظرة فهذا يعني أن:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

أي أن: $\forall(i,j)\in N_n^2; a_{ij}=a_{ji}$

مثال

إن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$ هي مصفوفة متناظرة لأن $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}={}^tA$

مبرهنة (9)

إن مجموعة المصفوفات المتناظرة $S_n(k)$ هي فضاء شعاعي جزئي من $M_n(K)$ بعده $\frac{n(n+1)}{2}$. إن مجموعة المصفوفات التخالفية $A_n(K)$ هي أيضاً فضاء جزئي من $M_n(K)$ بعده $\frac{n(n-1)}{2}$ وحيث $M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$

الإثبات:

من السهل جدا إثبات أن كل من $S_n(K), A_n(K)$ هو فضاء جزئي من $M_n(K)$ وذلك واضح من تعريف من هاتين المجموعتين.

لتكن الجملة $(E_{ij})_{(ij)\in N_n^2}$ التي تشكل الأساس القانوني للفضاء $M_n(K)$. عندئذ الجملة $S=(S_{ij})_{(ij)\in Tn}$ وحيث $T_n=\{(i,j)\in N_n^2; i\le j\}$ و $\forall(i,j)\in T_n; S_{ij}=\begin{cases}E_{ii}, & i=j\\ E_{ij}+E_{ji} & : i\neq j\end{cases}$

إن S تشكل أساساً للفضاء $S_n(K)$ ولدينا $\dim(S_n(K))=card(T_n)=\frac{n(n+1)}{2}$.

الجملة $S'=(S'_{i,j});(i,j)\in T'_n$ حيث $T'_n=\{(i,j)\in N_n^2; i<j\}$

و $;1\le i<j\le n \quad S'_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ تكون أساساً للفضاء $A_n(K)$ وبالتالي $\dim A_n(K)=Card(T'_n)=\frac{n(n-1)}{2}$. أخيراً لنفرض أن $M\in S_n(K)\cap A_n(K)$ أي $M={}^tM=-{}^tM$ إذن $M=0_n$ ومن جهة أخرى فإن

$\forall M\in M_n(k); \quad M=\frac{1}{2}(M+{}^tM)+\frac{1}{2}(M-{}^tM)$ يمكن التحقق من ذلك بسهولة وكذلك يمكنك إثبات أن $\frac{1}{2}(M-{}^tM)\in A_n(K)$ وأن $\frac{1}{2}(M+{}^tM)\in S_n(K)$ إذن نستنتج أن $M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$.

5- المصفوفات القلوبة (Invertible Matrix)

تعريف

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة. نقول أن A قلوبة إذا وفقط إذا وجدت المصفوفة $B \in M_n(K)$ بحيث يكون $AB = BA = I_n$ ونرمز لمجموعة المصفوفات القلوبة بـ $GL_n(k)$

مبرهنة (10)

إن البنية $(GL_n(k),\times)$ هي زمرة غير تبديلية وعنصرها الحيادي هو المصفوفة I_n.

الإثبات:

واضح ومباشر من تعريف $GL_n(k)$.

مثال

لتكن لدينا $A, B \in M_n(K)$ ولنفرض أن $AB = 0_n$. أثبت أن إذا كانت A قلوبة فإن $B = 0_n$.

الحل:

إن A قلوبة عندئذٍ يوجد حسب التعريف مصفوفة $A' \in M_n(K)$ حيث $AA' = A'A = I_n$ إذن $A'(AB) = A'0_n$ و بالتالي $I_n B = 0_n$ لأن ضرب المصفوفات عمليـة تجميعيـة. إذن $B = 0_n$.

مبرهنة (11)

لتكن $A \in M_n(K)$. الخواص التالية متكافئة:

1- $A \in GL_n(k)$

2- A قابلة للقلب من اليسار أي: $\exists B \in M_n(K);\quad BA = I_n$

3- A قابلة للقلب من اليمين أي: $\exists B \in M_n(K);\quad AB = I_n$

4- $\forall X \in M_{n\times 1}(K);\quad AX = 0_{n1} \Rightarrow X = 0_{n1}$

5- $rg(A) = n$

4. مصفوفة تطبيق خطي (The matrix of linear map)

تعريف

ليكن لدينا الفضاء الشعاعي E منتهي البعد على الحقل K. لتكن $e=(e_1,\dots,e_n)$ أساس لـ E. ليكن $x\in E$ عندئذ $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ نسمي مصفوفة الشعاع x بالأساس e المصفوفة من القياس $n\times 1$

$$Mat_e(x)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in M_{n\times 1}(K)$$

تعريف

لتكن $S=(x_1,\dots,x_p)$ جملة مكونة من p شعاع من الفضاء E عندئذٍ $\forall j=1,\dots,p;\ x_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}e_i$ نُسمي مصفوفة الجملة S بالجملة e المصفوفة من القياس $n\times p$ والمعرفة كما يلي:

$$Mat_e(S)=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}\in M_{n\times p}(K)$$

تعريف

إذا كان F,E فضائين شعاعيين معرفين على الحقل K وحيث $\dim F=n,\dim E=P$.
ولتكن $e=(e_1,\dots,e_p)$ أساساً لـ E و $f=(f_1,\dots,f_n)$ أساس لـ F. ليكن $u\in L(E,F)$ تطبيق خطي. نسمي مصفوفة التطبيق الخطي u بالنسبة للأساسين f,u المصفوفة

$$Mat_{e,f}(u)=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}\in M_{n\times p}(k)$$

حيث $u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i \quad \forall j\in N_n;$ وبكلام آخر $Mat_{e,f}(u)$ هي مصفوفة الجملة

$$u(e)=(u(e_1),\dots,u(e_p))$$

مبرهنة (12)

ليكن E فضاء شعاعي منتهي البعد على الحقل K و $\dim E = p$ أساسه $e=(e_1,\dots,e_{p)}$ و F فضاء شعاعي منتهي البعد على الحقل K و $\dim F = n$ أساسه $f=(f_1,\dots,f_n)$ عندئذٍ التطبيق $\phi_{e,f} : L(E,F) \to M_{n\times p}(K)\,;\, u \to Mat_{e,f}(u)$ هو تشاكل فضاءات شعاعية تقابلي.

أي هو تطبيق خطي تقابل.

مثال

ليكن $U:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل التالي $u(x,y,z)=(x-y,z)\quad \forall(,x,y,z)\in R^3;$. لتكن $e=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ و $f=\{(1,2),(2,1)\}$ أساسين لكل من $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ على الترتيب. لاحظ أن:

$$u(e_1)=u(1,1,0)=(0,0)=0\beta_1-0\beta_2$$

$$u(e_2)=u(0,1,1)=(-1,1)=\beta_1-\beta_2$$

$$u(e_3)=u(1,0,1)=(1,1)=\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2$$

ومنه $Mat_{e,f}(u)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

5. رتبة مصفوفة (Rank of Matrix)

تعريف

لتكن $A\in M_{n\times p}(K)$ وليكن $C_1(A),\dots,C_p(A)$ أعمدة هذه المصفوفة. نسمي رتبة المصفوفة A ونرمز لذلك بـ $rg(A)$ رتبة الجملة $C=(C_1(A),\dots,C_p(A))$ أي أن

$$rg(A)=\dim vect(C)$$

ملاحظة

إن العمليات التالية:

1- التبديل بين أعمدة مصفوفة أو بين أسطرها. نرمز لذلك بـ $C_i \rightleftarrows C_j\,;(i,j)\in\mathbb{N}_n^2$

2- عملية ضرب عمود (أو سطر) بسلمي و إضافته إلى عمود (أو سطر) أخر. نرمز لذلك بـ $C_i \leftarrow C_i+\lambda C_j\,;\,(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\lambda\in K$ ، أي نقوم بتبديل العمود C_i بالعمود $C_i+\lambda C_j$ و $(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\lambda\in K$.

تسمى العمليات الأولية على المصفوفات.

مثال: أوجد رتبة المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -11 & 11 & 11 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$a_1,\ \ a_2-\frac{1}{2}a_1,\ a_3+a_1,\ a_4+a_2-\frac{1}{2}a_1+a_3,\ a_5+a_2\frac{1}{2}a_1+a_3$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & +6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

لنفرض أن:

$$b_1=a_1 \quad b_2=a_2-\frac{1}{2}a_1, \quad b_3=a_3+a_1 \quad b_4=a_4+a_3+a_2-\frac{1}{2}a_1$$

$$b_5=a_5+a_3+a_2-\frac{1}{2}a_1$$

نقوم بالعمليات الأولية التالية $b_5 \quad b_4+2b_2 \quad b_3-b_2+b_1 \quad b_2 \quad b_1$ ونحصل على

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نجري بالعمليات الأولية $b_5-\frac{6}{5}(b_4+2b_2) \quad b_4+2b_2 \quad b_3-b_2+b_1 \quad b_2 \quad b_1$ فنجد

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن: $rg(A)=4$

ملاحظة

نلاحظ أن رتبة مصفوفة هو عدد الأعمدة أو الأسطر المستقلة خطياً.

مبرهنة (13)

ليكن $u:E\to F$ تطبيق خطي حيث F,E فضائين شعاعيين فوق الحقل K وحيث $e=(e_1,\ldots,e_p)$ أساس E و$f=(f_1,\ldots,f_n)$ أساس F ولتكن $A=Mat_{e,f}(u)$

عندئذٍ $rg(u)=rg(A)$

الإثبات:

لدينا $rg(u)=\dim \mathrm{Im}(u)=rg(u(e_1),\ldots,u(e_p))$

وبما أن f أساس لـ F فإن التطبيق $\varphi_f : M_{n\times1}(k)\to F; Y=\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{bmatrix}\to\varphi_f(Y)=\sum_{i=1}^{n} y_i f_i$ هو تقابل خطي ويحقق ما يلي $\varphi_f(C_j(A))=u(e_j)\quad ;\quad \forall j\in N_p$

إذن:

$$\begin{aligned} rg(u)&=rg\left[\varphi_f\left(C_1(A)\right),\ldots,\varphi_f\left(C_p(A)\right)\right]\\ &=rg\left(C_1(A),\ldots,C_p(A)\right)=rg(A)\end{aligned}$$

نتيجة (2)

إذا كانت $A\in M_{n\times p}(K)$ فإن $rg(A)=rg({}^tA)$

6. تغيير الأساس

تعريف

ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد فوق الحقل K وليكن $e=(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E و$f=(f_1,\ldots,f_n)$ أساساً آخر للفضاء E. نسمي مصفوفة الانتقال من e إلى f المصفوفة $P_e^f=Mat_e(f_2,\ldots,f_n)$.